[問43]9sin45°+3cos135°+√6tan60°の値

$$9\sin 45°+3\cos 135°+\sqrt{6}\tan 60°=9\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+3\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}=6\sqrt{2}$$

[問44(1)]0°≦θ≦180°, cosθ=-4/5からtanθ

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ であるから　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{25}{16}$

よって　$\tan^2\theta=\dfrac{25}{16}-1=\dfrac{9}{16}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$，$\cos\theta<0$ より，θ は鈍角であるから　$\tan\theta<0$

ゆえに　$\tan\theta=-\sqrt{\dfrac{9}{16}}=-\dfrac{3}{4}$

[問44(2)]sinθ=4/5のとき, sin(90°−θ), tan(90°−θ)

θ は鋭角であるから　$\cos\theta>0$

よって　$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

ゆえに　$\sin(90°-\theta)=\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，$\tan(90°-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{3}{5}\div\dfrac{4}{5}=\dfrac{3}{4}$

[問45]直線の傾きと正接. x軸とのなす角が30°の直線

求める直線と x 軸とのなす角が 30° であるから，直線の傾きは　$\tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって，直線の方程式は，$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+b$ とおける。

点 $(\sqrt{3},\ 2)$ を通るから　$2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}+b$

ゆえに　$b=1$　　したがって　$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+1$

[問46(1)]正弦定理から辺の長さを求める

正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{BAC}}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}$　すなわち　$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin 45°}=\dfrac{3\sqrt{6}}{\sin 120°}$

よって　$\mathrm{BC}=\dfrac{3\sqrt{6}\sin 45°}{\sin 120°}=3\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\div\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6$

[問46(2)余弦定理から角の大きさを求める, 三角形の面積

余弦定理により　$\cos\angle\mathrm{A}=\dfrac{\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}}=\dfrac{15^2+7^2-13^2}{2\cdot15\cdot7}=\dfrac{1}{2}$

$0°<\angle\mathrm{A}<180°$ であるから　$\angle\mathrm{A}=60°$

よって，△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\cdot\sin\angle\mathrm{A}=\frac{1}{2}\cdot15\cdot7\cdot\sin 60°=\frac{1}{2}\cdot15\cdot7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{105\sqrt{3}}{4}$$

[問46(3)]正弦定理から辺の長さ, 外接円の半径を求める

$\angle\mathrm{C}=180°-(\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{B})=180°-(60°+75°)=45°$

正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{A}}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{C}}$　すなわち　$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin 60°}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sin 45°}$

よって　$\mathrm{BC}=\dfrac{3\sqrt{2}\sin 60°}{\sin 45°}=3\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}={}^{ア}3\sqrt{3}$

また，外接円の半径を R とすると，正弦定理により　$2R=\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{A}}$

よって　$R=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sin 60°}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}={}^{イ}3$

[問46(4)]余弦定理から辺の長さを求める

余弦定理により　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle\mathrm{C}$

すなわち　$7^2=8^2+b^2-2\cdot8\cdot b\cos 60°$　ゆえに　$49=64+b^2-2\cdot8\cdot b\cdot\dfrac{1}{2}$

整理すると　$b^2-8b+15=0$　よって　$(b-3)(b-5)=0$

したがって　$b=3,\ 5$　これらは $b>0$ を満たす。

[問47]8/sinA=7/sinB=5/sinCを満たす三角形の∠Bの大きさ

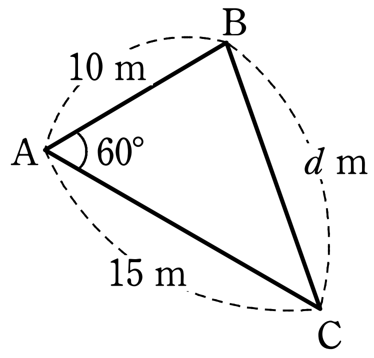
$\dfrac{8}{\sin A}=\dfrac{7}{\sin B}=\dfrac{5}{\sin C}$ から　BC : CA : AB = 8 : 7 : 5

よって，$\mathrm{BC}=8k$，$\mathrm{CA}=7k$，$\mathrm{AB}=5k\ (k>0)$ とおくと，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{B}=\frac{(8k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\cdot8k\cdot5k}=\frac{1}{2}$$

$0°<\angle\mathrm{B}<180°$ であるから　$\angle\mathrm{B}=60°$

[問48]木の間の距離(余弦定理を利用)



右の図のように杉と桜の直線距離を BC$=d$ (m) とおく。

△ABC において，余弦定理により

$$BC^2=AB^2+CA^2-2AB\cdot CA\cos\angle A$$

すなわち　$d^2=10^2+15^2-2\cdot10\cdot15\cos60^\circ$

$$=100+225-2\cdot10\cdot15\cdot\frac{1}{2}$$

$$=100+225-150=175$$

$d>0$ であるから　　$d=\sqrt{175}=5\sqrt{7}$ (m)

[問49]角の二等分線の長さ(三角形の面積の和を利用)

AD$=x$ とおく。

△ABC＝△ABD＋△ADC であるから

$$\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle CAB=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD+\frac{1}{2}AD\cdot AC\sin\angle DAC$$

すなわち　$\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\sin60^\circ=\frac{1}{2}\cdot3\cdot x\sin30^\circ+\frac{1}{2}\cdot x\cdot2\sin30^\circ$

ゆえに　$\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\cdot3\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot x\cdot2\cdot\frac{1}{2}$

整理すると　$5x=6\sqrt{3}$　　よって　$x=\frac{6\sqrt{3}}{5}$

したがって　AD$=\frac{6\sqrt{3}}{5}$

[問105(1)]√1890nが整数になるnの最小値

1890 を素因数分解すると　$1890=2\cdot3^3\cdot5\cdot7$

1890 に $2\cdot3\cdot5\cdot7$ を掛けると，$2^2\cdot3^4\cdot5^2\cdot7^2$ すなわち $(2\cdot3^2\cdot5\cdot7)^2$ になる。

よって，n の最小値は　$n=2\cdot3\cdot5\cdot7=210$

[問105(2)]4620/nが素数となる自然数nの個数

4620 を素因数分解すると　$4620=2^2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$

素数となる $\frac{4620}{n}$ は，2，3，5，7，11 の 5 通りである。

よって，求める n は　5 個

[問105(3)]7^2013の1の位の数字

7^1，7^2，7^3，7^4，7^5 …… の 1 の位の数字は順に　7，9，3，1，7，……

よって，4 つごとに 7，9，3，1 を繰り返す。

また　$2013=4\cdot503+1$

よって　$7^{2013}=7^{4\cdot503+1}=(7^4)^{503}\cdot7$

したがって，7^{2013} の 1 の位の数字は　7

[問105(4)]50!が3^nで割り切れる自然数nの最大値

求める自然数 n は，50! を素因数分解したときの素因数 3 の個数である。

1 から 50 までの自然数のうち

3 の倍数の個数は，50 を 3 で割った商で　16 (個)

3^2 の倍数の個数は，50 を 3^2 で割った商で　5 (個)

3^3 の倍数の個数は，50 を 3^3 で割った商で　1 (個)

$3^4>50$ であるから，3^k $(k\geqq4)$ の倍数はない。

よって，素因数 3 の個数は全部で　$16+5+1=22$ (個)

したがって，求める自然数 n の最大値は　22

[問106(1)]39,57,69の最大公約数と最小公倍数

39，57，69 を素因数分解すると　$39=3\cdot13$，　$57=3\cdot19$，　$69=3\cdot23$

よって，最大公約数は　3

最小公倍数は　$3\cdot13\cdot19\cdot23=17043$

[問106(2)]nと2013の最大公約数,最小公倍数からnを求める

n と 2013 の最大公約数が 183，最小公倍数が 26169 であるから　$2013n=183\times26169$

これを解いて　$n=2379$

[問107]a,bを7で割るとそれぞれ2,3が余る.a-b,abを7で割った余り

a を 7 で割ると 2 余り，b を 7 で割ると 3 余るから，整数 k，l を用いて

$a=7k+2$，$b=7l+3$ と表される。

このとき　$a-b=(7k+2)-(7l+3)=7k-7l-1$

$$=7k-7l-7+6=7(k-l-1)+6$$

$k-l-1$ は整数であるから，$a-b$ を 7 で割ったときの余りは ${}^{ア}6$ である。

また　$ab=(7k+2)(7l+3)=49kl+21k+14l+6$

$$=7(7kl+3k+2l)+6$$

$7kl+3k+2l$ は整数であるから，ab を 7 で割ったときの余りは ${}^{イ}6$ である。

[問108]n(n+1)(2n+1)が6の倍数である証明

$n(n+1)(2n+1)=n(n+1)\{(n+2)+(n-1)\}$

$$=n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)$$

$n(n+1)(n+2)$，$(n-1)n(n+1)$ は，連続する 3 つの整数の積であるから，どちらも 6 の

倍数である。

よって，$n(n+1)(2n+1)$ は 6 の倍数である。

[問109]正方形のﾏｸﾞﾈｯﾄを敷き詰めるときに必要な個数

マグネットの 1 辺の長さを a cm とする。

$$150=a\cdot(\text{縦に並ぶ枚数})$$

$$216=a\cdot(\text{横に並ぶ枚数})$$

となるから，a は 150 と 216 の公約数である。

よって，マグネットをできるだけ大きくするには，a を 150 と 216 の最大公約数にすればよい。

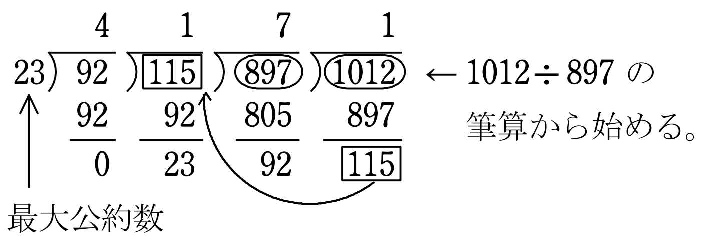
150，216 を素因数分解すると　$150=2\cdot3\cdot5^2$，$216=2^3\cdot3^3$

したがって　$a=2\cdot3=6$

このとき，必要となるマグネットの個数は　$(150\div6)\times(216\div6)=25\times36=900$ (個)

[問110(1)]897,1012の最大公約数(互除法利用)

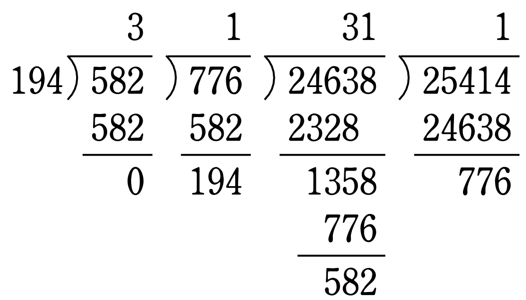
$$1012=897\cdot1+115$$
$$897=115\cdot7+92$$
$$115=92\cdot1+23$$
$$92=23\cdot4+0$$



よって，最大公約数は　23

[問110(2)]25414,24638の最大公約数(互除法利用)

$$25414=24638\cdot1+776$$
$$24638=776\cdot31+582$$
$$776=582\cdot1+194$$
$$582=194\cdot3+0$$



よって，最大公約数は　194

[問111(1)]不定方程式7x-5y=1の解法

$$7x-5y=1 \quad \cdots\cdots ①$$

$x=3$，$y=4$ は，① の整数解の 1 つである。

よって　$7\cdot3-5\cdot4=1$　……②

①−② から　$7(x-3)-5(y-4)=0$　……③

7 と 5 は互いに素であるから，③ より　$x-3=5m$，$y-4=7m$　(m は整数)

したがって，① のすべての整数解は　$x=5m+3$，$y=7m+4$　(m は整数)

[問111(2)]不定方程式12x+7y=1の解法

$$12x+7y=1 \quad \cdots\cdots ①$$

$x=3$，$y=-5$ は，① の整数解の 1 つである。

よって　$12\cdot3+7\cdot(-5)=1$　……②

①−② から　$12(x-3)+7(y+5)=0$　……③

12 と 7 は互いに素であるから，③ より　$x-3=7k$，$y+5=-12k$　(k は整数)

したがって，① のすべての整数解は　$x=7k+3$，$y=-12k-5$　(k は整数)