

数学 I

$$A = \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{6}}, \quad B = \frac{1}{1 - \sqrt{2} + \sqrt{6}} \text{ とする。}$$

$$\text{このとき, } AB = \frac{1}{(1 + \sqrt{6})^2 - \boxed{\text{ア}}} = \boxed{\text{イ}} - \boxed{\text{ウ}} \sqrt{\boxed{\text{エ}}} \text{ であり,}$$

$$\frac{1}{2A} + \frac{1}{2B} = \boxed{\text{オ}} + \sqrt{\boxed{\text{カ}}} \text{ である。以上により,}$$

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = -\boxed{\text{キ}} + \boxed{\text{ク}} \sqrt{\boxed{\text{ケ}}} \text{ である。}$$

解説

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{(1 + \sqrt{6}) + \sqrt{2}} \times \frac{1}{(1 + \sqrt{6}) - \sqrt{2}} = \frac{1}{(1 + \sqrt{6})^2 - 2} = \frac{1}{7 + 2\sqrt{6} - 2} \\ &= \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}} = \frac{5 - 2\sqrt{6}}{(5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})} = \frac{5 - 2\sqrt{6}}{25 - 24} = 5 - 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2A} = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}, \quad \frac{1}{2B} = \frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$

$$\text{ゆえに } \frac{1}{2A} + \frac{1}{2B} = \frac{2 + 2\sqrt{6}}{2} = 1 + \sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} \text{以上により } \frac{A}{2} + \frac{B}{2} &= AB \left(\frac{1}{2A} + \frac{1}{2B} \right) = (5 - 2\sqrt{6})(1 + \sqrt{6}) \\ &= 5 + 5\sqrt{6} - 2\sqrt{6} - 12 = -7 + 3\sqrt{6} \end{aligned}$$