

数学Ⅱ

O を原点とする座標平面上に2点 A (3, -3), B (7, 1) をとり, 線分 AB を 1 : 3 に内分する点を P, 3 : 1 に外分する点を Q とする。また, 3点 O, P, Q を通る円を C とする。

- (1) P の座標は (,) であり, Q の座標は (,) である。
- (2) 円 C の方程式を次のように求めよう。線分 OP の中点を通り, OP に垂直な直線 ℓ の方程式は $y = \text{ } x - \text{ }$ であり, 線分 PQ の中点を通り, PQ に垂直な直線 m の方程式は $y = -x + \text{ }$ である。これらの2直線の交点が円 C の中心であることから, 円 C の方程式は $(x - \text{ })^2 + (y - \text{ })^2 = \text{ }$ であることがわかる。

解説

- (1) 点 P は線分 AB を 1 : 3 に内分するから $\frac{3 \cdot 3 + 1 \cdot 7}{1 + 3} = 4, \frac{3 \cdot (-3) + 1 \cdot 1}{1 + 3} = -2$

よって, 点 P の座標は (4, -2)

- 点 Q は線分 AB を 3 : 1 に外分するから $\frac{-1 \cdot 3 + 3 \cdot 7}{3 - 1} = 9, \frac{-1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1}{3 - 1} = 3$

よって, 点 Q の座標は (9, 3)

- (2) OP の中点は $(\frac{4}{2}, \frac{-2}{2})$ すなわち (2, -1)

OP の傾きは $-\frac{1}{2}$ であり, ℓ と垂直に交わるから,

ℓ の傾きは 2 である。

よって, ℓ の方程式は $y - (-1) = 2(x - 2)$

ゆえに $y = 2x - 5$

PQ の中点は $(\frac{4+9}{2}, \frac{-2+3}{2})$ すなわち $(\frac{13}{2}, \frac{1}{2})$

PQ の傾きは 1 であり, m と垂直に交わるから, m の傾きは -1 である。

よって, m の方程式は $y - \frac{1}{2} = -\left(x - \frac{13}{2}\right)$ ゆえに $y = -x + 7$

円 C の中心は, ℓ と m の交点であり, その x 座標は $2x - 5 = -x + 7$
 $x = 4$

ℓ の方程式に $x = 4$ を代入すると $y = 3$ よって, 円の中心は (4, 3)

半径は OP であるから $r^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

したがって, 3点 O, P, Q を通る円の方程式は $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$

