

数学B

点 O を原点とする座標空間に4点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 4)$, $D(3, 1, 2)$ が点 P は平面 ABC 上の点であるから、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

と表される。また、点 P は直線 OD 上の点であるから

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OD}$$

ところで、 $\overrightarrow{OD} = \boxed{\text{ア}} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{\boxed{\text{イ}}} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{\boxed{\text{ウ}}} \overrightarrow{OC}$

であるから、 $k = \frac{1}{\boxed{\text{エ}}}$, $s = \frac{1}{\boxed{\text{オ}}}$, $t = \frac{1}{\boxed{\text{カ}}}$

となる。したがって、交点 P の座標は $P\left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}, \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}, \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\right)$

また、 AP と BC の交点は、線分 BC を $\boxed{\text{ス}}$: 1 に内分する。

(解説)

点 P は平面 ABC 上の点であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + s(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + t(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \\ &= (1-s-t)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} \quad \cdots \cdots \text{①} \end{aligned}$$

また、 A, B, C, D の座標から

$$\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

と表される。点 P は直線 OD 上にあるから

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OD} = k\left(3\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) = 3k\overrightarrow{OA} + \frac{k}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{k}{2}\overrightarrow{OC} \quad \cdots \cdots \text{②}$$

①, ② から $1-s-t=3k$, $s=\frac{k}{2}$, $t=\frac{k}{2}$

これを解くと $k=\frac{1}{4}$, $s=\frac{1}{8}$, $t=\frac{1}{8}$

したがって $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OC} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

よって、点 P の座標は $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

また、 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC}$ であるから

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\left(\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}\right)$$

よって、 AP と BC の交点は、線分 BC を 1:1 に内分する。

