

数学B

a を正の数とする。三角形 ABC の内部の点 P が $a\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$ を満たしている

とする。このとき $\overrightarrow{AP} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{a + \boxed{\text{イ}}} \overrightarrow{AB} + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{a + \boxed{\text{エ}}} \overrightarrow{AC}$ である。

直線 AP と辺 BC との交点を D とすると $BD : DC = \boxed{\text{オ}} : \boxed{\text{カ}}$ であり、点 P が線分 AD を $3 : 1$ に内分するとき $a = \boxed{\text{キ}}$ である。

さらに、 $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{7}$, $|\overrightarrow{AC}| = 4$ であるとする、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \boxed{\text{クケ}}$,

$|\overrightarrow{AP}| = \boxed{\text{コ}}$ である。

解説

$$\text{与式から} \quad -a\overrightarrow{AP} + 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP} = \vec{0}$$

$$\text{よって} \quad (a+3)\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$a > 0 \text{ から} \quad \overrightarrow{AP} = \frac{2}{a+3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{a+3}\overrightarrow{AC} \dots\dots \text{①}$$

点 D は直線 AP 上にあるから $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AP}$ (k は実数) $\dots\dots \text{②}$ と表される。

$$\text{このとき} \quad \overrightarrow{AD} = \frac{2k}{a+3}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{a+3}\overrightarrow{AC} \dots\dots \text{③}$$

$$\text{点 } D \text{ が辺 } BC \text{ 上にあることから} \quad \frac{2k}{a+3} + \frac{k}{a+3} = 1, \quad \frac{2k}{a+3} \geq 0, \quad \frac{k}{a+3} \geq 0$$

$$\text{よって} \quad k = \frac{a+3}{3} \dots\dots \text{④}$$

$$\text{④を③に代入すると} \quad \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{ゆえに} \quad BD : DC = 1 : 2$$

$$\text{点 } P \text{ が線分 } AD \text{ を } 3 : 1 \text{ に内分するとき} \quad \overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AP}$$

$$\text{よって、②から} \quad k = \frac{4}{3}$$

$$\text{このとき、④から} \quad \frac{4}{3} = \frac{a+3}{3} \quad \text{ゆえに} \quad a = 1$$

$$\text{また、} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \text{ から} \quad |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + |\overrightarrow{AB}|^2$$

ここで、 $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{7}$, $|\overrightarrow{AC}| = 4$ を代入すると

$$(2\sqrt{7})^2 = 4^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + 2^2$$

$$\text{ゆえに} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4$$

$$\text{さらに、} a = 1 \text{ のとき、①から} \quad \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{よって} \quad |\overrightarrow{AP}|^2 = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{16}|\overrightarrow{AC}|^2 = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$|\overrightarrow{AP}| > 0 \text{ から} \quad |\overrightarrow{AP}| = 1$$