[問62] データの平均値，中央値，最頻値

このデータを小さい順に並べると

1，3，3，4，5，5，5，6，6，6，7，7，7，7，8，8，9，9，10，10

平均値は

$$\frac{1}{20}(1+3\times2+4+5\times3+6\times3+7\times4+8\times2+9\times2+10\times2)=\frac{1}{20}\times126=6.3\ (点)$$

中央値は　$\frac{6+7}{2}=6.5$（点）

最頻値は　7 点

[問63] 箱ひげ図から読み取れることとして正しいものを選ぶ

テスト B の箱ひげ図の方が高い位置にあるが，100 人全員がテスト B の方が得点が高かったかどうかは，この図からはわからない。

よって，① は正しいと断定できない。

100 人の 4 分の 1 の人数は 25 人であり，テスト A の箱ひげ図において，第 1 四分位数が 40 点より低い。

よって，② は正しいと断定できる。

この箱ひげ図からは，それぞれのテストで得点が 60 点台の生徒の人数を読み取ることはできない。

ゆえに，どちらのテストの方が 60 点台の生徒が多いかはわからない。

よって，③ は正しいと断定できない。

テスト A の箱ひげ図において，第 3 四分位数が 60 点台にあるため，70 点以上の生徒は 25 人以下である。

また，テスト B の箱ひげ図において，中央値が 70 点台にあるため，70 点以上の生徒は 50 人以上である。

よって，④ は正しいと断定できる。

以上から，正しいと断定できるものは　②，④

[問64] データの分散，標準偏差．散らばり度合いの比較

x，y のデータの平均値を $\overline{x}$，$\overline{y}$，分散を $s_x{}^2$，$s_y{}^2$，標準偏差を s_x，s_y とする。

$$\overline{x}=\frac{1}{8}(10+8+9+13+9+5+7+7)=\frac{1}{8}\times68=8.5\ (点)$$

よって　$s_x{}^2=\frac{1}{8}\{(10-8.5)^2+(8-8.5)^2+(9-8.5)^2+(13-8.5)^2$

$+(9-8.5)^2+(5-8.5)^2+(7-8.5)^2+(7-8.5)^2\}$

$=\frac{1}{8}(2.25+0.25+0.25+20.25+0.25+12.25+2.25+2.25)$

$=\frac{1}{8}\times40=5$

ゆえに　$s_x=\sqrt{5}$（点）

$$\overline{y}=\frac{1}{8}(4+7+10+15+12+8+7+9)=\frac{1}{8}\times72=9\ (点)$$

よって　$s_y{}^2=\frac{1}{8}\{(4-9)^2+(7-9)^2+(10-9)^2+(15-9)^2$

$+(12-9)^2+(8-9)^2+(7-9)^2+(9-9)^2\}$

$=\frac{1}{8}(25+4+1+36+9+1+4+0)=\frac{1}{8}\times80=10$

ゆえに　$s_y=\sqrt{10}$（点）

別解　$\overline{x}=\frac{1}{8}(10+8+9+13+9+5+7+7)=\frac{1}{8}\times68=8.5$（点）

$\overline{x^2}=\frac{1}{8}(10^2+8^2+9^2+13^2+9^2+5^2+7^2+7^2)$

$=\frac{1}{8}(100+64+81+169+81+25+49+49)=\frac{1}{8}\times618=77.25$

よって　$s_x{}^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2=77.25-8.5^2=5$，　$s_x=\sqrt{5}$（点）

$\overline{y}=\frac{1}{8}(4+7+10+15+12+8+7+9)=\frac{1}{8}\times72=9$（点）

$\overline{y^2}=\frac{1}{8}(4^2+7^2+10^2+15^2+12^2+8^2+7^2+9^2)$

$=\frac{1}{8}(16+49+100+225+144+64+49+81)=\frac{1}{8}\times728=91$

よって　$s_y{}^2=\overline{y^2}-(\overline{y})^2=91-9^2=10$，　$s_y=\sqrt{10}$（点）

(2)　(1) より，平均値が大きいのは　y のデータ

また，y のデータの方が標準偏差が大きいから，データの平均値からの散らばりの度合いが大きいのは　y のデータ

[問65]身長と体重の相関係数

x の平均値 $\overline{x}$ と，y の平均値 $\overline{y}$ は

$$\overline{x}=\frac{1}{5}(181+167+173+169+165)=\frac{855}{5}=171$$

$$\overline{y}=\frac{1}{5}(75+59+63+67+61)=\frac{325}{5}=65$$

よって，x の標準偏差 s_x，y の標準偏差 s_y は

$$s_x=\sqrt{\frac{1}{5}\{(181-171)^2+(167-171)^2+(173-171)^2+(169-171)^2+(165-171)^2\}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{5}\{10^2+(-4)^2+2^2+(-2)^2+(-6)^2\}}=\sqrt{\frac{160}{5}}=4\sqrt{2}$$

$$s_y=\sqrt{\frac{1}{5}\{(75-65)^2+(59-65)^2+(63-65)^2+(67-65)^2+(61-65)^2\}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{5}\{10^2+(-6)^2+(-2)^2+2^2+(-4)^2\}}=\sqrt{\frac{160}{5}}=4\sqrt{2}$$

5 人の x の偏差と y の偏差の積はそれぞれ

$(181-171)\cdot(75-65)=10\cdot10=100,$

$(167-171)\cdot(59-65)=(-4)\cdot(-6)=24,$

$(173-171)\cdot(63-65)=2\cdot(-2)=-4,$

$(169-171)\cdot(67-65)=(-2)\cdot2=-4,$

$(165-171)\cdot(61-65)=(-6)\cdot(-4)=24$

したがって，x と y の共分散 s_{xy} は

$$s_{xy}=\frac{1}{5}\{100+24+(-4)+(-4)+24\}=\frac{140}{5}=28$$

よって，x と y の相関係数 r は　$r=\dfrac{s_{xy}}{s_xs_y}=\dfrac{28}{4\sqrt{2}\cdot4\sqrt{2}}=\dfrac{7}{8}$

$\dfrac{7}{8}=0.875$ であるから，小数第 3 位を四捨五入して　0.88

[問224(1)]ﾍﾞｸﾄﾙ. a+b=(1,4),a-2b=(4,-5)のとき|2a-b|

$\vec{a}+\vec{b}=(1,\ 4)$ ……①，$\vec{a}-2\vec{b}=(4,\ -5)$ ……② とする。

①－② から　$3\vec{b}=(-3,\ 9)$　　よって　$\vec{b}=(-1,\ 3)$

ゆえに，① より　$\vec{a}=(2,\ 1)$

よって　$2\vec{a}-\vec{b}=2(2,\ 1)-(-1,\ 3)=(5,\ -1)$

ゆえに　$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$

別解　①，② の辺々を加えると　$2\vec{a}-\vec{b}=(5,\ -1)$

よって　$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$

[問224(2)]ﾍﾞｸﾄﾙ. c=xa+ybを満たすx,yの値

$$x\vec{a}+y\vec{b}=x(1,\ 2)+y(-2,\ 3)=(x-2y,\ 2x+3y)$$

$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とすると　$(-3,\ 8)=(x-2y,\ 2x+3y)$

よって　$x-2y=-3,\ 2x+3y=8$　　これを解いて　$x=1,\ y=2$

[問224(3)]ﾍﾞｸﾄﾙm=(1,p),n=(p+3,4)が平行のときのp

$\vec{m}$ と $\vec{n}$ が平行であるとき，$\vec{n}=k\vec{m}$（k は実数）と表される。

よって　$(p+3,\ 4)=k(1,\ p)$

ゆえに　$p+3=k$ ……①，$4=kp$ ……②

① を ② に代入して　$4=(p+3)p$

よって　$p^2+3p-4=0$　　ゆえに　$(p-1)(p+4)=0$

したがって　$p=1,\ -4$

[問225(1)]ﾍﾞｸﾄﾙ. a=(1,-2)とb=(-3,1)の内積a・b

$\vec{a}=(1,\ -2)$，$\vec{b}=(-3,\ 1)$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-3)+(-2)\times1=-5$

[問225(2)]|a|=1,|b|=2,(a-b)⊥(5a+2b)からﾍﾞｸﾄﾙa,bのなす角

$\vec{a}-\vec{b}$，$5\vec{a}+2\vec{b}$ が垂直であるから　$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(5\vec{a}+2\vec{b})=0$

よって　$5|\vec{a}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$ であるから　$5\times1^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}-2\times2^2=0$

これを解いて　$\vec{a}\cdot\vec{b}={}^{ア}-1$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を $\theta\ (0°\leqq\theta\leqq180°)$ とすると，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ であるから

$1\times2\cos\theta=-1$　　ゆえに　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta={}^{イ}120°$

[問226]内分点と外分点をﾍﾞｸﾄﾙで表す

(ア)　$\overrightarrow{OC}=\dfrac{7}{5+7}\overrightarrow{OA}+\dfrac{5}{5+7}\overrightarrow{OB}=\dfrac{7}{12}\overrightarrow{OA}+\dfrac{5}{12}\overrightarrow{OB}=\dfrac{7}{12}\overrightarrow{OA}+\left(1-\dfrac{7}{12}\right)\overrightarrow{OB}$

よって　$s=\dfrac{7}{12}$

(イ) $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{-4}{7+(-4)}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{7}{7+(-4)}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$$=\left(\frac{-4}{7-4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{7}{7-4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)-\left(\frac{7}{12}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{5}{12}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

$$=-\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{7}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{7}{12}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{5}{12}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$=\frac{23}{12}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{23}{12}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{23}{12}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\frac{23}{12}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

よって　　$t=\dfrac{23}{12}$

[問227]ﾍﾞｸﾄﾙ.a=(-7,4),b=(2,-3)のとき|a+tb|の最小

$\vec{a}+t\vec{b}=(-7,\ 4)+t(2,\ -3)=(-7+2t,\ 4-3t)$

よって　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(-7+2t)^2+(4-3t)^2=13t^2-52t+65=13(t-2)^2+13$

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq 0$ であるから，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ が最小となるとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となる。

よって，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t=$ ア2 のとき最小値 イ$\sqrt{13}$ をとる。

[問228]四面体の辺の内分点をﾍﾞｸﾄﾙで表す

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{1+2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{2}{1+2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{1}{1+2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)-\dfrac{1}{3}\vec{b}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

[問229(1)]四角形ABDCが平行四辺形になる点Dの座標

点 D の座標を $(x,\ y,\ z)$ とおく。

四角形 ABDC が平行四辺形になるとき　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(x+1,\ y+1,\ z-3)$ であるから

$$x+1=-2,\ y+1=2,\ z-3=0$$

これを解くと　$x=-3,\ y=1,\ z=3$

よって，求める点 D の座標は　$(-3,\ 1,\ 3)$

[問229(2)]座標空間の点が一直線上にある条件

3 点 A，B，C が一直線上にあるための条件は，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 k が存在することである。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,\ 6,\ -3)\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(a-1,\ b+1,\ -5)$$

よって　　$(a-1,\ b+1,\ -5)=(3k,\ 6k,\ -3k)$

ゆえに　　$a-1=3k$　…… ①，　$b+1=6k$　…… ②，　$-5=-3k$　…… ③

③ から　　$k=\dfrac{5}{3}$

①，② から　　$a=$ ア6，$b=$ イ9

[問230]座標空間の点が与えられた3点を通る平面上にある条件

点 D が平面 ABC 上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (s，t は実数) と表されるから

$$((m+6)-1,\ 1-1,\ (m+10)-1)$$
$$=s(2-1,\ 3-1,\ 2-1)+t(-1-1,\ -2-1,\ -3-1)$$

すなわち　　$(m+5,\ 0,\ m+9)=(s-2t,\ 2s-3t,\ s-4t)$

よって　　$m+5=s-2t$　…… ①

$0=2s-3t$　…… ②

$m+9=s-4t$　…… ③

①－③ より　　$-4=2t$　　ゆえに　　$t=-2$

これを ② に代入すると　　$0=2s-3\times(-2)$　　よって　$s=-3$

$s=-3$，$t=-2$ を ① に代入すると　　$m+5=-3-2\times(-2)$

これを解いて　　$m=-4$