

数学B

△ABCにおいて、 $AB=5$, $BC=6$, $CA=7$ とする。

∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とすると、 $\overrightarrow{AD} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}} \overrightarrow{AB} + \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}} \overrightarrow{AC}$ である。

また、∠B の二等分線と線分 AD との交点を I とすると、 $AI : ID = \boxed{\text{キ}} : 1$ であり、

$\overrightarrow{AI} = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}} \overrightarrow{AB} + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}} \overrightarrow{AC}$ である。

△ABC の重心を G とすると、 $\overrightarrow{AG} = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \overrightarrow{AB} + \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \overrightarrow{AC}$ であるから、 $\overrightarrow{GI}$ と $\overrightarrow{BC}$ は平行であり、

$|\overrightarrow{GI}| = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

解説

AD は ∠BAC の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC = 5 : 7$$

よって $\overrightarrow{AD} = \frac{7}{12} \overrightarrow{AB} + \frac{5}{12} \overrightarrow{AC}$

また $BD = 6 \times \frac{5}{5+7} = \frac{5}{2}$

BI は ∠ABD の二等分線であるから

$$AI : ID = BA : BD = 5 : \frac{5}{2} = 2 : 1$$

よって $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{2+1} \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \left(\frac{7}{12} \overrightarrow{AB} + \frac{5}{12} \overrightarrow{AC} \right) = \frac{7}{18} \overrightarrow{AB} + \frac{5}{18} \overrightarrow{AC}$

また $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$

ゆえに $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AG} = \left(\frac{7}{18} \overrightarrow{AB} + \frac{5}{18} \overrightarrow{AC} \right) - \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \right) = \frac{1}{18} (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$
 $= -\frac{1}{18} \overrightarrow{BC}$

したがって、 $\overrightarrow{GI} \parallel \overrightarrow{BC}$ であり $|\overrightarrow{GI}| = \frac{1}{18} |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{18} \cdot 6 = \frac{1}{3}$

