

- (1) 単位ベクトル $\vec{e}$ が $\vec{a}=(3, t)$ に垂直で $\vec{b}=(4, 3)$ と平行になるとき

$$t=\boxed{\text{アイ}}, \vec{e}=\left(\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}, \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right), \left(\frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}, \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}\right) \text{である。}$$

- (2) $\vec{a}=(1, 0, -1)$, $\vec{b}=(1, -1, 4)$ とすると, $\vec{a} \cdot \vec{b}=\boxed{\text{スセ}}$ である。

よって, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると, $\theta=\boxed{\text{ソタチ}}^\circ$ である。

また, $\left|\vec{s}\vec{a}+\frac{1}{s}\vec{b}\right|$ ($s>0$) は $s=\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{\text{テ}}}$ をとる。

解説

- (1) $\vec{e}=(x, y)$ とおく。 $\vec{e}$ は単位ベクトルであるから $x^2+y^2=1$ ……①

$\vec{e}$ と $\vec{a}$ が垂直であるから $\vec{e} \cdot \vec{a}=0$ よって $3x+ty=0$ ……②

$\vec{e}$ と $\vec{b}$ が平行であるから, $\vec{e}=k\vec{b}$ (k は 0 でない実数) と表される。

よって $x=4k$ ……③, $y=3k$ ……④

③, ④を②に代入すると $3 \cdot 4k+t \cdot 3k=0$ よって $3k(t+4)=0$

$k \neq 0$ であるから $t+4=0$ ゆえに $t=-4$

また, ③, ④を①に代入すると $(4k)^2+(3k)^2=1$

よって, $25k^2=1$ から $k^2=\frac{1}{25}$ ゆえに $k=\pm\frac{1}{5}$

このとき, ③, ④から $x=\pm\frac{4}{5}$, $y=\pm\frac{3}{5}$ (複号同順)

したがって $\vec{e}=\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

- (2) $\vec{a} \cdot \vec{b}=1 \cdot 1+0 \cdot (-1)+(-1) \cdot 4=-3$

また $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

よって $\cos\theta=\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-3}{\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $\theta=120^\circ$

$$\begin{aligned} \left|\vec{s}\vec{a}+\frac{1}{s}\vec{b}\right|^2 &= \left(\vec{s}\vec{a}+\frac{1}{s}\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{s}\vec{a}+\frac{1}{s}\vec{b}\right) = s^2|\vec{a}|^2 + 2s \cdot \frac{1}{s} \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{s^2}|\vec{b}|^2 \\ &= s^2 \cdot (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot (-3) + \frac{1}{s^2} \cdot (3\sqrt{2})^2 = 2s^2 + \frac{18}{s^2} - 6 \end{aligned}$$

$s^2>0$ であるから, 相加平均と相乗平均の大小関係により

$$2s^2 + \frac{18}{s^2} - 6 \geq 2\sqrt{2s^2 \cdot \frac{18}{s^2}} - 6 = 2\sqrt{36} - 6 = 6$$

$s>0$ であるから, 等号は $2s^2=\frac{18}{s^2}$ すなわち $s=\sqrt{3}$ のとき成り立つ。

また, $\left|\vec{s}\vec{a}+\frac{1}{s}\vec{b}\right|>0$ であるから, $\left|\vec{s}\vec{a}+\frac{1}{s}\vec{b}\right|^2$ が最小のとき, $\left|\vec{s}\vec{a}+\frac{1}{s}\vec{b}\right|$ も最小となる。ゆえに, $\left|\vec{s}\vec{a}+\frac{1}{s}\vec{b}\right|$

は $s=\sqrt{3}$ のとき最小値 $\sqrt{6}$ をとる。