数学Ⅱ

a，b を実数とする。x の整式 $P(x)$ を $P(x)=x^3+(a-2)x^2+(b-2)x-a-b-1$ とし，$P(2)=0$ が成り立つとする。b は a を用いて $b=\boxed{\text{アイ}}a+\boxed{\text{ウ}}$ と表される。

このとき，b を消去して $P(x)$ を因数分解すると

$$P(x)=\left(x-\boxed{\text{エ}}\right)\left(x^2+\boxed{\text{オ}}x-\boxed{\text{カ}}+\boxed{\text{キ}}\right)$$

となる。3 次方程式 $P(x)=0$ が虚数解をもつような a の範囲は $\boxed{\text{クケ}}<a<\boxed{\text{コ}}$ である。さらに，1 つの虚数解の実部が 1 であるならば $a=\boxed{\text{サシ}}$ であり，$a=\boxed{\text{サシ}}$ のとき $P(x)=0$ の 3 つの解の逆数の和は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

(解説)

$P(2)=0$ であるから　$2^3+(a-2)\cdot 2^2+(b-2)\cdot 2-a-b-1=0$

よって　$b=-3a+5$

b を消去すると　$P(x)=x^3+(a-2)x^2+(-3a+3)x+2a-6$

$P(2)=0$ であるから　$P(x)=(x-2)(x^2+ax-a+3)$

3 次方程式 $P(x)=0$ が虚数解をもつのは，2 次方程式 $x^2+ax-a+3=0$ ……① が虚数解をもつときである。

① の判別式を D とすると，条件は　$D=a^2-4(-a+3)<0$

すなわち　$a^2+4a-12<0$　　よって　$(a+6)(a-2)<0$

ゆえに　$-6<a<2$

① の解は　$x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2+4a-12}}{2}$

これが虚数であるとき，その実部は　$-\dfrac{a}{2}$

実部が 1 であるとき　$-\dfrac{a}{2}=1$　　よって　$a=-2$

これは $-6<a<2$ を満たす。

また，このとき　$P(x)=(x-2)(x^2-2x+5)$

$P(x)=0$ から　$x-2=0$　または　$x^2-2x+5=0$

ゆえに，$P(x)=0$ の 3 つの解は　$x=2,\ 1\pm 2i$

したがって，それらの逆数の和は　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{1+2i}+\dfrac{1}{1-2i}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1-2i+(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{1^2-(2i)^2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}=\dfrac{9}{10}$

別解　3 つの解の逆数の和

$a=-2$ のとき，$P(x)=(x-2)(x^2-2x+5)$ であるから，$x^2-2x+5=0$ の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係より　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=5$

したがって，$P(x)=0$ の 3 つの解の逆数の和は

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{2}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{9}{10}$$