

数学Ⅱ

- (1) a, b を実数とする。2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が $x = 2 + 3i$ を解にもつとき、
 $a = \boxed{\text{アイ}}$, $b = \boxed{\text{ウエ}}$ である。
- (2) 2次方程式 $x^2 - 3(m+1)x + 4m + 10 = 0$ の2つの解のうち、1つの解が他の解の2倍となるような定数 m の値は $m = \boxed{\text{オカ}}$ または $m = \boxed{\text{キ}}$ である。
- (3) 2次方程式 $x^2 - x + 2 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 α^3, β^3 を解にもつ2次方程式の1つは $x^2 + \boxed{\text{ク}}x + \boxed{\text{ケ}} = 0$ である。

解説

- (1) $x^2 + ax + b = 0$ が $x = 2 + 3i$ を解にもつから、 $x = 2 - 3i$ もこの2次方程式の解である。よって、解と係数の関係から $(2 + 3i) + (2 - 3i) = -a$, $(2 + 3i)(2 - 3i) = b$
ゆえに $a = -4$, $b = 13$

別解 $x = 2 + 3i$ を $x^2 + ax + b = 0$ に代入して $(2 + 3i)^2 + a(2 + 3i) + b = 0$

左辺を整理すると $(2a + b - 5) + (3a + 12)i = 0$

a, b は実数であるから $2a + b - 5 = 0$, $3a + 12 = 0$

よって $a = -4$, $b = 13$

- (2) 2次方程式 $x^2 - 3(m+1)x + 4m + 10 = 0$ の2つの解を $\alpha, 2\alpha$ ($\alpha \neq 0$) とおくと、解と係数の関係から

$$\alpha + 2\alpha = 3(m+1) \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2\alpha^2 = 4m + 10 \dots\dots \textcircled{2}$$

①から $\alpha = m + 1$

これを②に代入して整理すると $m^2 = 4$ ゆえに $m = -2, 2$

- (3) 解と係数の関係から $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = 2$

よって $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 1^3 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = -5$

$$\alpha^3\beta^3 = (\alpha\beta)^3 = 2^3 = 8$$

ゆえに、 α^3 と β^3 を解にもつ2次方程式の1つは $x^2 + 5x + 8 = 0$